



# Prévision numérique des écarts entre grandeurs statistiques au sens de Favre et grandeurs statistiques au sens de Reynolds à partir d'un modèle au second ordre

M.A. Ould Sid Ahmed \*, T. Lili

*Département de Physique, Faculté des Sciences de Tunis, Campus Universitaire, 1060, Tunis, Tunisie*

Reçu le 26 juin 1998; reçu en forme révisée le 21 février 2000

## Abstract

Cet article a pour objet la prévision numérique d'écoulements turbulents isothermes de mélange gazeux binaire. Une procédure de prévision des écarts entre grandeurs statistiques au sens de Favre et grandeurs statistiques au sens de Reynolds à partir d'un modèle au second ordre en moyennes de Favre est proposée. Cette procédure utilise des relations de passage entre grandeurs statistiques, relations qui s'appuient sur l'équation d'état du mélange et qui s'expriment à l'aide de corrélations faisant intervenir la fluctuation de la fraction massique de l'un des constituants du mélange. La validité de cette méthode de prévision d'écarts est testée par référence aux résultats expérimentaux bien documentés de Panchapakesan et Lumley relatifs au développement d'un jet d'hélium dans de l'air au repos. © 2001 Published by Elsevier Science Ltd.

## 1. Introduction

Les écoulements turbulents de fluides à masse volumique variable interviennent dans un grand nombre de phénomènes physiques aussi bien dans la nature que dans les processus industriels. Les variations de la masse volumique peuvent être dues à des écarts significatifs de température au sein d'un même fluide, à un mélange de fluides miscibles de masses volumiques différentes ou encore à des effets de compressibilité.

A titre indicatif et sans prétendre à une liste exhaustive, de tels écoulements interviennent en particulier dans les domaines de la combustion, de l'énergétique, de l'aéronautique, de l'environnement.

Sur un plan fondamental, les variations de masse volumique conduisent à une formulation mathématique complexe due au couplage entre les équations du champ dynamique et du champ scalaire. De plus, le champ de vitesse n'est plus un champ à divergence nulle comme c'est le cas d'un écoulement à masse volumique constante. Ainsi, l'étude des écoulements turbulents de fluide à masse volumique variable présente un grand intérêt tant sur le plan fondamental que sur celui des applica-

tions industrielles. Cet article concerne justement la prévision numérique d'écoulements turbulents de fluide constitué par un mélange gazeux binaire.

Dans la littérature, différentes formulations ont été utilisées pour étudier les écoulements à masse volumique variable. Pour les modèles allant jusqu'au second ordre, quatre types de schémas ont été proposés. Le premier schéma, et assurément le plus utilisé pour la prévision numérique, est le schéma de Favre [1–8] qui préconise une décomposition en moyenne pondérée par la masse. Le deuxième schéma utilise la moyenne conventionnelle au sens de la moyenne d'ensemble [9,10] en lui associant éventuellement [11] une hypothèse relative aux fluctuations de masse volumique. Le troisième schéma est un schéma de décomposition mixte introduit par Bauer et al. [12] et développé par Ha Minh et al. [13]. Le quatrième schéma a été proposé par Chassaing [14–17]; il s'agit d'un schéma intermédiaire entre le schéma de Reynolds et celui de Favre puisqu'il utilise des fluctuations centrées en même temps qu'une pondération par la masse pour les moments d'ordre deux.

En ce qui concerne la procédure de modélisation, les modèles utilisés dans le cadre d'une formulation de Favre constituent une extrapolation de ceux conçus pour des écoulements à masse volumique constante [18–20].

\* Corresponding author.

Utilisant les techniques de modélisation invariante de Lumley, Chassaing et Hérard [15] et Chassaing et Chibat [16] développent des modèles s'appuyant sur la formulation de Chassaing [14]. Enfin, Shih et al. [11] proposent, dans le cadre d'une formulation en moyenne conventionnelle, un modèle élaboré prenant en compte une hypothèse de faibles fluctuations de masse volumique.

D'un point de vue expérimental, l'essentiel des travaux sur les écoulements de mélange concerne des configurations simples de type jet, couche de mélange et couche limite. Nous pouvons citer notamment les travaux de Chassaing [21], Mac Innes [22], Shih et al. [11], So et al. [23], Sautet [24], Panchapakesan et Lumley [25], Djeridane [26], Ruffin [27] et Gharbi et al. [28].

Pour des comparaisons à l'expérience, nous ferons référence, dans cet article, aux résultats expérimentaux de Panchapakesan et Lumley [25] relatifs à un jet d'hélium parce qu'ils constituent une véritable banque de données très précise et très complète incluant non seulement les moments d'ordre deux (tensions de Reynolds, flux du scalaire, variance du scalaire) mais aussi les corrélations triples notamment celles faisant intervenir la fluctuation du scalaire.

Dans cet article, nous proposons une procédure de passage des grandeurs statistiques au sens de Favre aux grandeurs statistiques au sens de Reynolds, à partir d'un modèle standard en moyennes de Favre. Cette procédure conduit aussi à la prévision d'écart entre grandeurs statistiques de Favre et de Reynolds allant jusqu'à la prévision d'écart relatifs aux corrélations triples. Cette procédure sera testée dans le cas d'un jet d'hélium par référence aux résultats expérimentaux bien documentés de Panchapakesan et Lumley [25].

## 2. Relations de passage entre grandeurs statistiques au sens de Favre et grandeurs statistiques au sens de Reynolds

Avant d'envisager une application précise, il importe de considérer le problème général du passage entre les deux formulations de Favre et de Reynolds pour les moments statistiques d'ordre un, deux et trois relatifs aux composantes de la vitesse et de la fraction massique de l'un des constituants du mélange gazeux.

### 2.1. Passage des moments statistiques au sens de Favre aux moments statistiques au sens de Reynolds

Nous supposons connaître, pour une configuration donnée d'écoulement d'un mélange gazeux binaire en situation isotherme, les moments statistiques au sens de Favre associés aux vitesses et à la fraction massique de l'un des constituants du mélange; plus précisément, nous envisageons la situation où nous disposons de données

précises de simulation numérique concernant les champs des vitesses moyennes  $\widetilde{u}_i$ , de la fraction massique  $\widetilde{c}$ , des tensions de Reynolds  $\widetilde{u}_i''u_j''$ , des flux massiques turbulents  $\widetilde{u}_i''c''$ , de la variance de la fraction massique  $\widetilde{c}''^2$  et des corrélations triples

$$\widetilde{u}_i''\widetilde{u}_j''u_k'', \quad \widetilde{u}_i''\widetilde{u}_j''c'', \quad \widetilde{u}_i''\widetilde{c}''^2 \quad \text{et} \quad \widetilde{c}''^3.$$

Nous nous proposons de déterminer les champs des grandeurs statistiques analogues au sens de Reynolds à savoir

$$\overline{u}_i, \quad \overline{c}, \quad \overline{u_i' u_j'}, \quad \overline{u_i' c'}, \quad \overline{c'^2}, \quad \overline{u_i' u_j' u_k'}, \quad \overline{u_i' u_j' c'}, \quad \overline{u_i' c'^2} \quad \text{et} \quad \overline{c'^3}$$

(les notation indicielles concernent aussi bien les coordonnées cartésiennes que les coordonnées cylindriques).

Le point de départ de notre raisonnement est évidemment l'équation (instantanée) d'état du mélange binaire (constituants  $A$  et  $B$ ) en évolution isotherme écrite sous la forme:

$$\rho = \frac{b}{1 - a\tilde{c}}, \quad a = (\rho_A - \rho_B)/\rho_A, \quad b = \rho_B, \quad c = c_A. \quad (1)$$

Cette équation conduit, après décomposition de Favre pour la fraction massique, aux deux relations:

$$\overline{\rho} = \frac{b}{1 - a\overline{c}}, \quad (2)$$

$$\rho(1 - a\tilde{c}) = a\rho c'' + b. \quad (3)$$

La deuxième relation permet d'écrire successivement, pour toute grandeur  $f$ :

$$\rho f(1 - a\tilde{c}) = a\rho c'' f + b f,$$

$$\overline{\rho \tilde{f}}(1 - a\overline{c}) = a\overline{\rho c'' \tilde{f}} + b\overline{f},$$

$$b\overline{f} = a\overline{\rho c'' \tilde{f}} + b\overline{f},$$

et nous retenons, en définitive, la relation intéressante:

$$\overline{f} = \overline{\tilde{f}} - \frac{a}{b}\overline{\rho c'' \tilde{f}}. \quad (4)$$

Remplaçant successivement  $f$  par  $u_i''$ ,  $c''$ ,  $u_i''u_j''$ ,  $u_i''c''$ ,  $c''^2$ ,  $u_i''u_j''u_k''$ ,  $u_i''u_j''c''$ ,  $u_i''c''^2$  et  $c''^3$ , nous obtenons:

$$\overline{u_i''} = -\frac{a}{b}\overline{\rho u_i'' c''},$$

$$\overline{c''} = -\frac{a}{b}\overline{\rho c''^2},$$

$$\overline{u_i''u_j''} = \overline{u_i''u_j''} - \frac{a}{b}\overline{\rho u_i''u_j'' c''},$$

$$\overline{u_i''c''} = \overline{u_i''c''} - \frac{a}{b}\overline{\rho u_i'' c''^2},$$

$$\overline{c''^2} = \overline{c''^2} - \frac{a}{b}\overline{\rho c''^3},$$

$$\overline{u_i''u_j''u_k''} = \overline{u_i''u_j''u_k''} - \frac{a}{b}\overline{\rho u_i''u_j''u_k'' c''},$$

$$\overline{u_i''u_j''c''} = \overline{u_i''u_j''c''} - \frac{a}{b}\overline{\rho u_i''u_j'' c''^2},$$

$$\overline{u_i''c''^2} = \overline{u_i''c''^2} - \frac{a}{b}\overline{\rho u_i'' c''^3},$$

$$\overline{c''^3} = \overline{c''^3} - \frac{a}{b}\overline{\rho c''^4}. \quad (5)$$

Ecrivons maintenant  $u_i'' = u_i' + \overline{u_i''}$  et  $c'' = c' + \overline{c''}$ , nous pouvons alors passer respectivement de

$$\overline{u_i'' u_j''}, \overline{u_i'' c''}, \overline{c''^2}, \overline{u_i'' u_j'' u_k''}, \overline{u_i'' u_j'' c''}, \overline{u_i'' c''^2} \text{ et } \overline{c''^3}$$

à  $\overline{u_i' u_j'}$ ,  $\overline{u_i' c'}$ ,  $\overline{c'^2}$ ,  $\overline{u_i' u_j' u_k'}$ ,  $\overline{u_i' u_j' c'}$ ,  $\overline{u_i' c'^2}$  et  $\overline{c'^3}$

et obtenir enfin les relations de passage:

$$\overline{u_i} = \tilde{u}_i - \frac{a}{b} \overline{\rho u_i'' c''}, \tag{6}$$

$$\overline{c} = \tilde{c} - \frac{a}{b} \overline{\rho c''^2}, \tag{7}$$

$$\overline{u_i' u_j'} = \overline{u_i'' u_j''} - \frac{a}{b} \overline{\rho c'' u_i'' u_j''} - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \overline{\rho^2 u_i'' c'' u_j'' c''}, \tag{8}$$

$$\overline{u_i' c'} = \overline{u_i'' c''} - \frac{a}{b} \overline{\rho u_i'' c''^2} - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \overline{\rho^2 u_i'' c''^2 c''^2}, \tag{9}$$

$$\overline{c'^2} = \overline{c''^2} - \frac{a}{b} \overline{\rho c''^3} - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \overline{\rho^2 c''^2 c''^2}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \overline{u_i' u_j' u_k'} &= \overline{u_i'' u_j'' u_k''} - \frac{a}{b} \overline{\rho u_i'' u_j'' u_k'' c''} \\ &+ \frac{a}{b} \overline{\rho u_j'' c''} \left[ \overline{u_i'' u_k''} - \frac{a}{b} \overline{\rho u_i'' u_k'' c''} \right] \\ &+ \frac{a}{b} \overline{\rho u_i'' c''} \left[ \overline{u_j'' u_k''} - \frac{a}{b} \overline{\rho u_j'' u_k'' c''} \right] \\ &+ \frac{a}{b} \overline{\rho u_k'' c''} \left[ \overline{u_i'' u_j''} - \frac{a}{b} \overline{\rho u_i'' u_j'' c''} \right] \\ &- 2 \left(\frac{a}{b}\right)^3 \overline{\rho^3 u_i'' c'' u_j'' c'' u_k'' c''}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \overline{u_i' u_j' c'} &= \overline{u_i'' u_j'' c''} - \frac{a}{b} \overline{\rho u_i'' u_j'' c''^2} \\ &+ \frac{a}{b} \overline{\rho u_i'' c''} \left[ \overline{u_j'' c''} - \frac{a}{b} \overline{\rho u_j'' c''^2} \right] \\ &+ \frac{a}{b} \overline{\rho u_j'' c''} \left[ \overline{u_i'' c''} - \frac{a}{b} \overline{\rho u_i'' c''^2} \right] \\ &+ \frac{a}{b} \overline{\rho c''^2} \left[ \overline{u_i'' u_j''} - \frac{a}{b} \overline{\rho u_i'' u_j'' c''} \right] \\ &- 2 \left(\frac{a}{b}\right)^3 \overline{\rho^3 u_i'' c'' u_j'' c'' c''^2}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \overline{u_i' c'^2} &= \overline{u_i'' c''^2} - \frac{a}{b} \overline{\rho u_i'' c''^3} + 2 \frac{a}{b} \overline{\rho c''^2} \left[ \overline{u_i'' c''} - \frac{a}{b} \overline{\rho u_i'' c''^2} \right] \\ &+ \frac{a}{b} \overline{\rho u_i'' c''} \left[ \overline{c''^2} - \frac{a}{b} \overline{\rho c''^3} \right] - 2 \left(\frac{a}{b}\right)^3 \overline{\rho^3 c''^2 c''^2 u_i'' c''}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \overline{c'^3} &= \overline{c''^3} - \frac{a}{b} \overline{\rho c''^4} + 3 \frac{a}{b} \overline{\rho c''^2} \left[ \overline{c''^2} - \frac{a}{b} \overline{\rho c''^3} \right] \\ &- 2 \left(\frac{a}{b}\right)^3 \overline{\rho^3 c''^2 c''^2 c''^2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Ces relations permettent à priori de passer des grandeurs statistiques au sens de Favre aux grandeurs au sens de Reynolds mais aussi de déterminer les écarts entre grandeurs statistiques se correspondant dans les deux formulations (sous réserve, pour les corrélation triples, de disposer de modèles pour les corrélations d'ordre quatre).

Dans le cadre de l'application que nous présenterons ultérieurement qui consiste en la simulation numérique du développement d'un jet axisymétrique d'hélium s'épanouissant dans de l'air au repos, nous appliquerons ces relations pour la prévision numérique des écarts entre grandeurs statistiques se correspondant dans les deux formulations de Favre et de Reynolds.

2.2. Passage des moments statistiques au sens de Reynolds aux moments statistiques au sens de Favre

Nous supposons connaître maintenant les champs des moments statistiques au sens de Reynolds et nous nous proposons d'en déduire les champs des moments au sens de Favre.

Le point de départ de notre raisonnement est la relation simple valable pour toute grandeur  $f$ :

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\overline{\rho}}. \tag{15}$$

Remplaçant successivement  $f$  par  $u_i$ ,  $c$ ,  $u_i' u_j'$ ,  $u_i' c'$ ,  $c'^2$ ,  $c'' u_i'' u_j''$ ,  $c''^2 u_i''$  et  $c''^3$  et exprimant respectivement  $u_i''$  et  $c''$  par  $u_i' + \overline{u_i''}$  et  $c' + \overline{c''}$ , nous obtenons sans difficulté:

$$\tilde{u}_i = \overline{u_i} + \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\overline{\rho}}, \tag{16}$$

$$\tilde{c} = \overline{c} + \frac{\overline{\rho' c'}}{\overline{\rho}}, \tag{17}$$

$$\overline{u_i' u_j'} = \overline{u_i'' u_j''} + \frac{\overline{\rho' u_i' u_j'}}{\overline{\rho}} - \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' u_j'}}{\overline{\rho}}, \tag{18}$$

$$\overline{u_i' c'} = \overline{u_i'' c''} + \frac{\overline{\rho' u_i' c'}}{\overline{\rho}} - \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' c'}}{\overline{\rho}}, \tag{19}$$

$$\overline{c'^2} = \overline{c''^2} + \frac{\overline{\rho' c'^2}}{\overline{\rho}} - \frac{\overline{\rho' c'}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' c'}}{\overline{\rho}}, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \overline{c'' u_i'' u_j''} &= \overline{c' u_i' u_j'} + \frac{\overline{\rho' u_i' u_j' c'}}{\overline{\rho}} - \frac{\overline{\rho' u_i' u_j'}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' c'}}{\overline{\rho}} - \frac{\overline{\rho' u_j' c'}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\overline{\rho}} \\ &- \frac{\overline{\rho u_i' c'}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' u_j'}}{\overline{\rho}} + 2 \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' u_j'}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' c'}}{\overline{\rho}}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \overline{c''^2 u_i''} &= \overline{c'^2 u_i'} + \frac{\overline{\rho' u_i' c'^2}}{\overline{\rho}} - 2 \frac{\overline{\rho u_i' c'}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' c'}}{\overline{\rho}} - \frac{\overline{\rho c'^2}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\overline{\rho}} \\ &+ 2 \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' c'}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' c'}}{\overline{\rho}}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\overline{c''^3} = \overline{c'^3} + \frac{\overline{\rho' c'^3}}{\overline{\rho}} - 3 \frac{\overline{\rho c'^2}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' c'}}{\overline{\rho}} + 2 \frac{\overline{\rho' c'}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' c'}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' c'}}{\overline{\rho}}. \tag{23}$$

Il importe de préciser qu'il est facile de montrer l'équivalence entre ces relations de passage et celles établies précédemment pour le passage, en sens inverse, entre les grandeurs au sens de Favre et celles au sens de Reynolds.

De plus, dans le cadre de l'application concernant le jet d'hélium, nous comparerons les écarts entre grandeurs statistiques obtenues à partir des données de simulation numérique aux mêmes écarts déduits des données expérimentales de Panchapakesan et Lumley à partir de ce second groupe de relations de passage.

### 2.3. Interêt des relations de passage

Ces relations de passage sont importantes et trois raisons essentielles justifient leur intérêt.

Premièrement, le fait de disposer de données numériques concernant parallèlement les grandeurs statistiques au sens de Favre et celles au sens de Reynolds peut apporter une aide significative à l'interprétation des mesures. Ainsi, Ruffin [27], comparant ses prévisions numériques à des données expérimentales concernant un jet d'hélium-air, confirme l'analyse effectuée par Djeridane [26] sur la base d'arguments relatifs au traitement statistique des données expérimentales, à savoir que les résultats expérimentaux obtenus par velocimétrie laser sont des moyennes de Reynolds.

Deuxièmement, ces relations de passage permettent de déterminer les écarts entre grandeurs statistiques en moyennes de Favre et grandeurs statistiques en moyennes de Reynolds. Ces relations montrent, en particulier, que les écarts tendent vers zéro si  $\rho'$  tend vers zéro. Ainsi, ces écarts constituent des mesures précises de l'influence des fluctuations de la masse volumique sur les grandeurs correspondantes. Déterminer ces écarts conduit donc à une analyse très fine de l'influence des fluctuations de masse volumique sur la structure de la turbulence.

Troisièmement, les équations statistiques utilisant une formulation de Reynolds sont plus compliquées que celles utilisant une formulation de Favre. Il est ainsi intéressant de retenir la formulation de Favre qui conduit à une simulation numérique plus simple. Parallèlement, compte tenu des relations de passage entre ces deux formulations, il est à priori possible d'utiliser des modèles conçus avec des "variables" de Reynolds dans une formulation de Favre. Cette procédure est susceptible d'ouvrir une voie intéressante consistant à séparer les "variables" de simulation des "variables" de modélisation.

## 3. Simulation numérique du développement d'un jet d'hélium

### 3.1. Présentation des expériences de Panchapakesan et Lumley

Panchapakesan et Lumley [25] ont effectué des mesures très fines et très complètes sur un jet axisymétrique d'hélium s'épanouissant verticalement et vers le haut dans l'air ambiant au repos. La vitesse de sortie du jet est

$U_j = 72,5$  m/s et le diamètre du tube donnant naissance au jet est  $d = 6,12$  mm. La région du jet explorée expérimentalement par Panchapakesan et Lumley s'étend de  $x/d = 50$  à  $x/d = 120$  et correspond à la région de transition entre la zone inertielle et à la zone de panache. En fait, des données expérimentales complètes concernent uniquement la zone  $90 \leq x/d \leq 120$  et pour cette raison, nous nous proposons de simuler numériquement le développement de ce jet d'hélium dans cette zone. A différentes stations de cette zone ( $x/d = 90, 100, 110$  et  $120$ ), Panchapakesan et Lumley donnent les valeurs expérimentales de

$$\begin{aligned} &\bar{u}/u_S, \quad \bar{c}/f_S, \quad \sqrt{\bar{u}^2}/u_S, \quad \sqrt{\bar{v}^2}/u_S, \quad \sqrt{\bar{w}^2}/u_S, \\ &\overline{u'v'}/u_S^2, \quad \sqrt{\overline{c'^2}}/f_S, \quad \overline{u'c'}/u_S f_S, \quad \overline{v'c'}/u_S f_S, \\ &\overline{c'^2 u'}/u_S f_S^2, \quad \overline{c'^2 v'}/u_S f_S^2, \quad \overline{c' u'^2}/u_S^2 f_S, \quad \overline{c' v'^2}/u_S^2 f_S, \\ &\overline{c' w'^2}/u_S^2 f_S \quad \text{et} \quad \overline{c' u' v'}/u_S^2 f_S, \end{aligned}$$

en fonction de  $r/x$  ou  $r/\delta$ ;  $u_S$  et  $f_S$  représentent respectivement la vitesse moyenne et la fraction massique moyenne sur l'axe du jet et  $\delta$  est la demi-épaisseur du jet (nous utilisons les mêmes notations que Panchapakesan et Lumley).

Il importe de signaler que les données expérimentales de Panchapakesan et Lumley sont les rares résultats de la littérature couvrant de manière fine les moments d'ordre deux et d'ordre trois.

Nous devons aussi indiquer que dans la zone  $90 \leq x/d \leq 120$ , les fluctuations de masse volumique sont faibles ( $\sqrt{\overline{\rho'^2}}/\bar{\rho} \simeq 0,01$ ). En conséquence, les écarts entre grandeurs au sens de Favre et grandeurs au sens de Reynolds sont aussi faibles de telle sorte que l'on puisse assimiler les unes aux autres avec une bonne approximation. Cependant, ces écarts sont directement liés aux corrélations d'ordre deux et trois et sont par suite accessibles à travers les données expérimentales concernant ces corrélations.

Ainsi, les données expérimentales de Panchapakesan et Lumley nous permettront, d'une part de tester le modèle au second ordre en moyennes de Favre en allant dans les comparaisons jusqu'aux corrélations d'ordre deux et d'autre part, d'étudier la validité de la procédure de passage entre formulations de Favre et de Reynolds par des comparaisons entre prévisions et données expérimentales concernant les écarts entre grandeurs statistiques.

### 3.2. Modèle standard au second ordre en moyennes de Favre

Nous considérons des écoulements stationnaires en moyenne. De plus, nous supposons que les nombres de Reynolds de la turbulence sont grands; dans ces conditions, les effets moléculaires sont négligeables devant les effets turbulents.

Pour la prévision numérique d'écoulements turbulents isothermes de mélange gazeux binaire, nous retenons un modèle standard au second ordre en moyennes de Favre [32]. Les équations de ce modèle, écrites en coordonnées cylindriques  $x$ ,  $r$  et  $\theta$  ( $\vec{e}_x$  est vertical ascendant,  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  sont horizontaux) dans le cadre des hypothèses d'axi-symétrie et de couche limite, sont présentées en Annexe A.

Il importe, à ce stade, d'insister sur les corrélations triples qui interviennent dans les relations de passage entre moyennes au sens de Favre et moyennes au sens de Reynolds. Les modèles adoptés pour les corrélations triples sont de type Deardorff [29]:

$$\widetilde{v''w''^2} = -c_S \frac{k}{\varepsilon} \left[ \widetilde{v''^2} \frac{\partial \widetilde{w''^2}}{\partial r} + 2 \frac{\widetilde{w''^2}}{r} (\widetilde{v''^2} - \widetilde{w''^2}) \right], \quad (24)$$

$$\widetilde{v''^3} = -3c_S \frac{k}{\varepsilon} \widetilde{v''^2} \frac{\partial \widetilde{v''^2}}{\partial r}, \quad (25)$$

$$\widetilde{u''v''^2} = -c_S \frac{k}{\varepsilon} \left[ 2\widetilde{v''^2} \frac{\partial \widetilde{u''v''}}{\partial r} + \widetilde{u''v''} \frac{\partial \widetilde{v''^2}}{\partial r} \right], \quad (26)$$

$$\widetilde{u''^2v''} = -c_S \frac{k}{\varepsilon} \left[ \widetilde{v''^2} \frac{\partial \widetilde{u''^2}}{\partial r} + 2\widetilde{u''v''} \frac{\partial \widetilde{u''v''}}{\partial r} \right], \quad (27)$$

$$\widetilde{c''u''^2} = -c_{ct} \frac{k}{\varepsilon} \left[ 2\widetilde{u''v''} \frac{\partial \widetilde{c''}}{\partial r} + \widetilde{v''c''} \frac{\partial \widetilde{u''^2}}{\partial r} \right], \quad (28)$$

$$\widetilde{c''v''^2} = -c_{ct} \frac{k}{\varepsilon} \left[ 2\widetilde{v''^2} \frac{\partial \widetilde{c''}}{\partial r} + \widetilde{v''c''} \frac{\partial \widetilde{v''^2}}{\partial r} \right], \quad (29)$$

$$\widetilde{c''w''^2} = -c_{ct} \frac{k}{\varepsilon} \left[ 2 \frac{\widetilde{v''c''}}{r} \widetilde{w''^2} + \widetilde{v''c''} \frac{\partial \widetilde{w''^2}}{\partial r} \right], \quad (30)$$

$$\widetilde{c''u''v''} = -c_{ct} \frac{k}{\varepsilon} \left[ \widetilde{v''^2} \frac{\partial \widetilde{c''}}{\partial r} + \widetilde{u''v''} \frac{\partial \widetilde{c''}}{\partial r} + \widetilde{v''c''} \frac{\partial \widetilde{u''v''}}{\partial r} \right], \quad (31)$$

$$\widetilde{c''^2u''} = -c_{cct} \frac{k}{\varepsilon} \left[ \widetilde{u''v''} \frac{\partial \widetilde{c''^2}}{\partial r} + 2\widetilde{v''c''} \frac{\partial \widetilde{c''^2}}{\partial r} \right], \quad (32)$$

$$\widetilde{c''^2v''} = -c_{cct} \frac{k}{\varepsilon} \left[ \widetilde{v''^2} \frac{\partial \widetilde{c''^2}}{\partial r} + 2\widetilde{v''c''} \frac{\partial \widetilde{c''^2}}{\partial r} \right]. \quad (33)$$

Nous avons négligé, dans ces modèles, les termes de dérivées par rapport à  $x$ , conformément aux hypothèses de couche limite.

### 3.3. Propriétés spécifiques du modèle au second ordre

Il importe de souligner certaines propriétés spécifiques du modèle au second ordre en moyennes de Favre adopté pour la simulation numérique.

D'abord, nous n'avons pas retenu l'hypothèse d'un gradient de pression moyenne dû uniquement à l'action

de la gravité; les composantes de celui-ci dépendent des dérivées axiale et radiale de  $\bar{\rho}v''^2$ . De plus, certains termes habituellement négligés dans le cadre des hypothèses de couche limite ont été maintenus; comme Chassaing [21], nous pensons qu'ils peuvent avoir une contribution non négligeable près de l'axe. Il s'agit, en particulier, des termes en  $\partial \bar{c}/\partial x$ ,  $\partial \bar{u}/\partial x$ ,  $\partial \bar{v}/\partial r$ ,  $\bar{v}/r$  intervenant dans les expressions des termes de production associés aux équations de transport des tensions de Reynolds, des flux de masse turbulents et de la variance du scalaire. Ces termes induisent des instabilités et nous avons été, après quelques essais, dans l'obligation d'éliminer notamment le terme  $-(\partial/\partial x)(\bar{\rho}u''^2 - \bar{\rho}v''^2)$  prévu initialement dans l'équation de transport de la quantité de mouvement (A.4); par contre, on peut s'affranchir des instabilités dues aux autres termes en assurant la dominance diagonale des matrices et en choisissant une valeur optimale du pas  $\Delta x$ .

Enfin, les modèles de diffusion utilisent un modèle complet de type Deardorff pour les corrélations triples sans recourir à une loi simplifiée de type gradient généralement utilisée dans un modèle au second ordre. Ce choix introduit une complication supplémentaire mais il est cependant nécessaire pour assurer la cohérence avec les modèles retenus pour les corrélations triples intervenant dans les relations de passage entre formulations en moyennes de Favre et en moyennes de Reynolds.

## 4. Présentation du code

Le modèle au second ordre en moyennes de Favre est constitué des équations (A.2)–(A.10).

Ces équations sont rendues sans dimension à l'aide de la vitesse sur l'axe  $u_S$  correspondant à la station  $x/d = 90$  et du diamètre  $d$ .

Le résolution numérique est effectuée à l'aide d'une méthode de différences finies entre la station initiale  $x/d = 90$  et la station finale  $x/d = 120$ . Ce sont les profils expérimentaux qui servent de profils initiaux (à la station initiale  $x/d = 90$ ).

A l'exception de l'équation de continuité, chaque équation de transport est écrite sous la forme:

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \eta a \frac{\partial f}{\partial \eta} \right] + b \frac{\partial f}{\partial \eta} + c - ef \quad \left( \eta = \frac{r}{d}, \quad \xi = \frac{x}{d} \right).$$

Le terme en  $-ef$  est introduit pour renforcer la dominance diagonale de la matrice tridiagonale associée à cette équation. A l'étape finale du processus itératif, nous confirmons la propriété de dominance diagonale pour toutes les équations qui, rappelons-le, permet de nous assurer de la stabilité vis à vis des erreurs d'arrondi.

Par ailleurs, comme le code repose sur une méthode de différences finies, il était important de vérifier certains

critaires de conservation. Deux critaires sont retenus et sont constitués par les relations intégrales associées à l'équation de quantité de mouvement et à l'équation de transport de la fraction massique  $\tilde{c}$  de l'hélium. Ces relations peuvent être établies facilement [31] et s'écrivent:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \bar{\rho} \tilde{u}^2 r dr = -g \int_0^\infty (\bar{p} - \rho_e) r dr - \frac{d}{dx} \int_0^\infty [\bar{\rho} \tilde{u}^{n^2} - \bar{\rho} \tilde{v}^{n^2}] r dr, \quad (34)$$

$$\int_0^\infty \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{c} r dr = \text{constante}. \quad (35)$$

Nous avons déjà signalé avoir maintenu certains termes généralement négligés du fait de l'hypothèse de couche limite, dans les termes de production des équations de transport des tensions de Reynolds, des flux de masse turbulents et de la variance du scalaire. Ces termes induisent des instabilités dans les profils de la vitesse  $\tilde{u}$  et de la fraction massique  $\tilde{c}$ . Ces instabilités disparaissent pour un choix particulier du pas  $\Delta \xi$ . Indiquons qu'un tel choix du pas  $\Delta \xi$  assure une bonne stabilité et une bonne précision; en effet, les relations intégrales précédentes sont parfaitement vérifiées (moins de 1/1000 en valeur relative).

## 5. Présentation et discussion des résultats relatifs au développement d'un jet d'hélium

Nous allons maintenant présenter les résultats de simulation numérique, les comparer aux résultats expérimentaux de Panchapakesan et Lumley et les commenter.

Indiquons tout d'abord qu'en ce qui concerne les constantes du modèle au second ordre en moyennes de Favre, nous avons envisagé de retenir les valeurs utilisées par Gharbi et al. [32] et qui se présentent comme suit:

$$\begin{aligned} c_S &= 0,22; & \gamma &= 0,6; & c_3 &= 0,5; & c_{ct} &= 0,15; \\ c_1 &= 1,8; & c_{c1} &= 3,0; & c_{c2} &= 0,33; & c_{c3} &= 0,33; \\ c_{cct} &= 0,11; & c_\varepsilon &= 0,16; & c_{\varepsilon 1} &= 1,45; & c_{\varepsilon 4} &= 1,0; \\ c_{\varepsilon 2} &= 1,90; & c_{\varepsilon c} &= 0,16; & c_{\varepsilon c 1}^1 &= 1,0; \\ c_{\varepsilon c 1}^2 &= 1,78; & c_{\varepsilon c 2}^1 &= 2,0; & c_{\varepsilon c 2}^2 &= 0,90. \end{aligned}$$

Les valeurs des constantes de diffusion posent à priori un problème dès l'instant que les modèles de diffusion adoptés ne sont pas les mêmes. Par ailleurs, Dekeyser et Launder [30] ont préconisé, en essayant les modèles dans une autre configuration d'écoulement, les valeurs  $c_S = 0,11$ ,  $c_{ct} = 0,11$  et  $c_{cct} = 0,11$ . Des essais numériques effectués avec notre code de calcul ont montré que les meilleurs résultats pour la vitesse axiale moyenne  $\tilde{u}$  (Fig. 1) et pour la fraction massique  $\tilde{c}$  (Fig. 2) sont obtenus pour des valeurs 0,11 et 0,11 des constantes  $c_S$  et  $c_{ct}$ . Des valeurs supérieures conduisent à des écarts plus grands avec les résultats expérimentaux. Parallèlement, ces es-

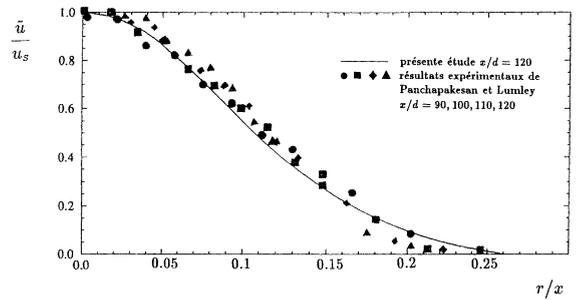


Fig. 1. Profil de la vitesse axiale moyenne.

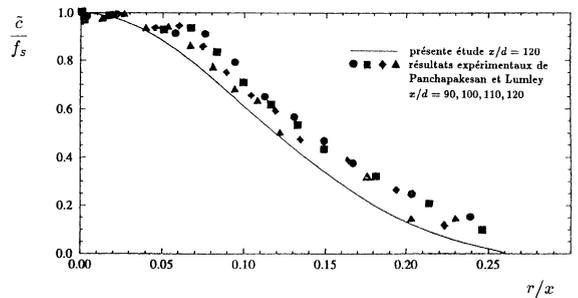


Fig. 2. Profil de la fraction massique moyenne.

sais ont montré que la valeur 0,2 affectée à  $c_{cct}$  donnait le meilleur accord avec l'expérience pour la variance  $\tilde{c}^{n^2}$  de la fraction massique. En dehors des constantes de diffusion, seule la valeur de la constante  $c_{c1}$  a été légèrement modifiée en vue d'améliorer les résultats relatifs aux flux de masse turbulents. En définitive, nous avons retenu les valeurs suivantes des constantes du modèle:

$$\begin{aligned} c_S &= 0,11; & \gamma &= 0,6; & c_3 &= 0,5; & c_{ct} &= 0,11; \\ c_1 &= 1,8; & c_{c1} &= 3,3; & c_{c2} &= 0,33; & c_{c3} &= 0,33; \\ c_{cct} &= 0,2; & c_\varepsilon &= 0,16; & c_{\varepsilon 1} &= 1,45; & c_{\varepsilon 4} &= 1,0; \\ c_{\varepsilon 2} &= 1,90; & c_{\varepsilon c} &= 0,16; & c_{\varepsilon c 1}^1 &= 1,0; \\ c_{\varepsilon c 1}^2 &= 1,78; & c_{\varepsilon c 2}^1 &= 2,0; & c_{\varepsilon c 2}^2 &= 0,90. \end{aligned}$$

Les évolutions radiales de

$$\begin{aligned} \tilde{u}/u_S, & \quad \tilde{c}/f_S, & \quad \sqrt{\tilde{u}^{n^2}}/u_S, & \quad \sqrt{\tilde{v}^{n^2}}/u_S, & \quad \sqrt{\tilde{w}^{n^2}}/u_S, \\ \tilde{u} \tilde{v}^{n^2}/u_S^2, & \quad \sqrt{\tilde{c}^{n^2}}/f_S, & \quad \tilde{u} \tilde{c}^{n^2}/u_S f_S, & \quad \tilde{v} \tilde{c}^{n^2}/u_S f_S \end{aligned}$$

sont présentées successivement Figs. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 et y sont comparées aux résultats expérimentaux de Panchapakesan et Lumley ( $r$  est rapporté à  $x$  ou à  $\delta$  qui est la demi-épaisseur du jet). Les résultats de simulation numérique sont relativement bons. Des écarts appréciables sont observés concernant l'intensité axiale de turbulence  $\sqrt{\tilde{u}^{n^2}}/u_S$  (de l'ordre de 15% au maximum)

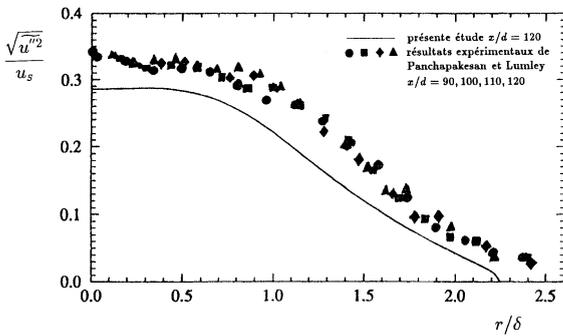


Fig. 3. Profil de l'intensité axiale de turbulence.

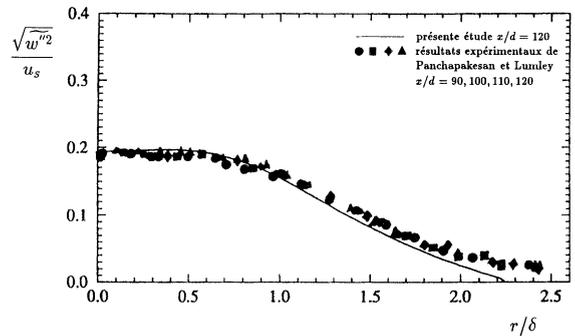


Fig. 5. Profil de l'intensité azimutale de turbulence.

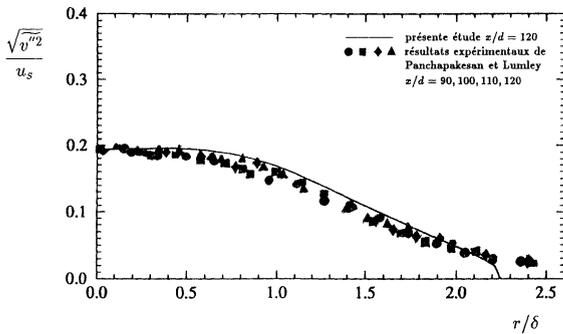


Fig. 4. Profil de l'intensité radiale de turbulence.

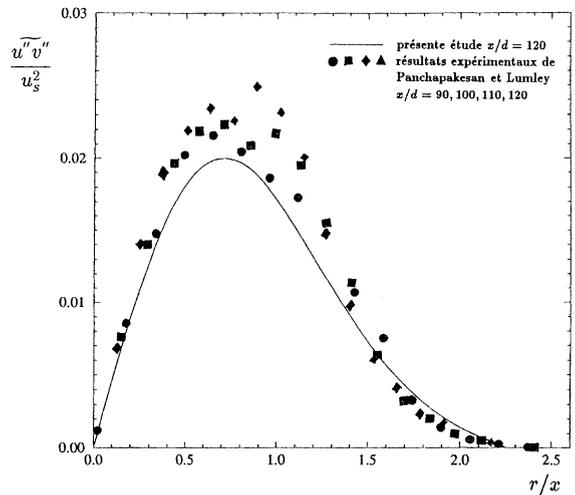


Fig. 6. Profil de la tension de Reynolds  $\widetilde{u''v''}$ .

et le flux radial de masse  $v''c''/u_s f_s$  (de l'ordre de 25% au maximum).

En définitive, il est raisonnable de conclure que les résultats peuvent être considérés globalement satisfaisants. Ainsi, le modèle au second ordre en moyennes de Favre retenu permet de simuler de manière satisfaisante les variations, à travers le jet, des différentes grandeurs statistiques jusqu'aux moments d'ordre deux.

### 6. Présentation et discussion des résultats relatifs aux écarts entre grandeurs statistiques au sens de Favre et au sens de Reynolds

Avant de commencer cette présentation, il y a lieu de rappeler que notre objectif est la prévision des écarts entre grandeurs statistiques pour un jet axisymétrique d'hélium s'épanouissant dans de l'air au repos et de comparer ces prévisions aux résultats qu'il est possible de déduire des données expérimentales de Panchapakesan et Lumley [25]. Précisons aussi que l'écart type des fluctuations de masse volumique est faible dans le cas des expériences de Panchapakesan et Lumley ( $\sqrt{\rho'^2/\bar{\rho}} < 0,01$ ). Il est alors justifié d'utiliser l'approximation de Shih et al. [11] $\rho' = (a/b)\bar{\rho}^2 c'$ . Cette approxi-

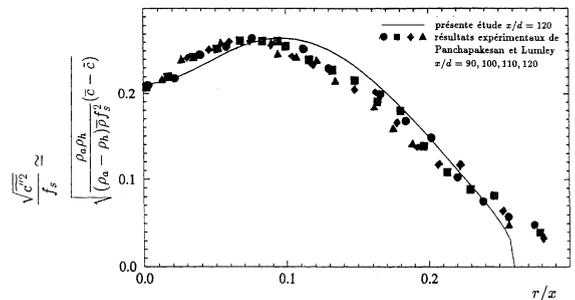


Fig. 7. Profil de l'intensité des fluctuations de fraction massique.

ation conduit en particulier à  $\sqrt{\rho'^2/\bar{\rho}} = a(\bar{\rho}/\rho_a)\sqrt{c'^2}$ . Ainsi,  $\sqrt{\rho'^2/\bar{\rho}} \ll 1$  entraîne  $\sqrt{c'^2} \ll 1$ . Enfin, nous adopterons les notations de Panchapakesan et Lumley:

$$\rho_a = \rho_{\text{air}}, \quad \rho_h = \rho_{\text{helium}}, \quad \rho_a/\rho_h = 7,24$$

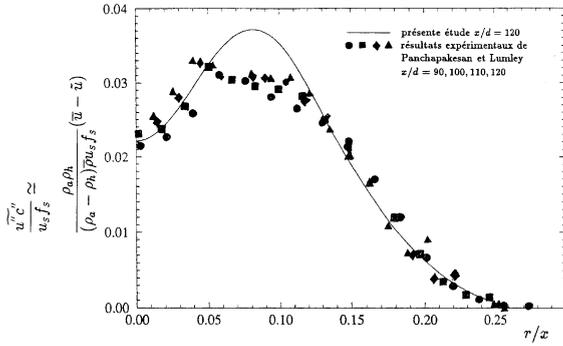


Fig. 8. Profil du flux axial de masse.

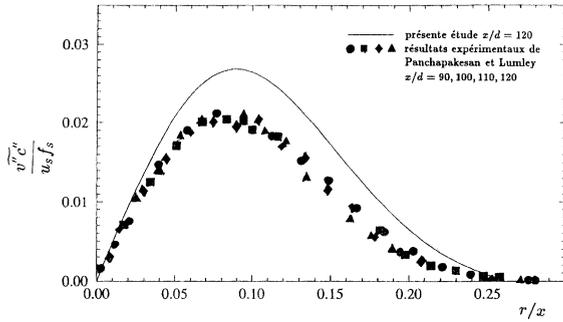


Fig. 9. Profil du flux radial de masse.

et dans la relation  $\rho = b/(1 - ac)$ , le coefficient  $a$  s'exprime alors par:  $a = (\rho_h - \rho_a)/\rho_h$  et vaut  $-6,24$  et le coefficient  $b$  est égal à  $\rho_a$ .

Pour clore ces considérations à propos des expériences de Panchapakesan et Lumley, il importe de rappeler que les écarts entre grandeurs statistiques au sens de Favre et au sens de Reynolds sont faibles en valeurs relatives de sorte qu'il est justifié d'assimiler les unes aux autres avec une bonne précision; cependant, ces écarts sont parfaitement accessibles aussi bien à la prévision numérique qu'à la détermination directe à partir des données expérimentales puisque ces écarts s'expriment à partir de certaines corrélations.

Nous allons examiner successivement les écarts entre vitesses et fractions massiques moyennes, les écarts entre corrélations d'ordre deux et enfin les écarts entre corrélations d'ordre trois.

### 6.1. Ecart entre vitesses et fractions massiques moyennes

Les relations (6) et (7) peuvent être écrites sous la forme:

$$\frac{\overline{u'c'}}{u_s f_s} = \frac{\rho_a \rho_h}{(\rho_a - \rho_h) u_s f_s \bar{\rho}} (\bar{u} - \tilde{u}), \tag{36}$$

$$\frac{\sqrt{\overline{c'^2}}}{f_s} = \sqrt{\frac{\rho_a \rho_h}{(\rho_a - \rho_h) f_s^2 \bar{\rho}}} \sqrt{(\bar{c} - \tilde{c})}. \tag{37}$$

De plus, comme nous l'avons déjà noté,  $\overline{u''c''} \approx \overline{u'c'}$  et  $\overline{c''^2} \approx \overline{c'^2}$ . Nous obtenons alors les relations suivantes:

$$\frac{\overline{u'c'}}{u_s f_s} = \frac{\rho_a \rho_h}{(\rho_a - \rho_h) u_s f_s \bar{\rho}} (\bar{u} - \tilde{u}), \tag{38}$$

$$\frac{\sqrt{\overline{c'^2}}}{f_s} = \sqrt{\frac{\rho_a \rho_h}{(\rho_a - \rho_h) f_s^2 \bar{\rho}}} \sqrt{(\bar{c} - \tilde{c})}. \tag{39}$$

Ainsi, la Fig. 8 représente non seulement le profil (à  $x/d = 120$ ) du flux de masse déterminé numériquement (trait plein) et obtenu expérimentalement ( $x/d = 90, 100, 110$  et  $120$ ) mais également, à un coefficient près égal à  $\rho_a \rho_h / ((\rho_a - \rho_h) u_s f_s \bar{\rho})$ , l'écart  $\bar{u} - \tilde{u}$  déterminé numériquement (trait plein) et déduit de l'expérience. De même, la Fig. 7 permet de comparer les profils numériques et expérimentaux de l'intensité des fluctuations de fraction massique et de la racine carrée de l'écart  $\bar{c} - \tilde{c}$  entre fractions massiques moyennes. Un bon accord est observé entre prévisions numériques et valeurs expérimentales pour les écarts entre vitesses axiales et fractions massiques moyennes.

### 6.2. Ecart entre corrélations d'ordre deux

D'abord, dans les formules de passage (8) et (9) et dans les formules équivalentes (18) et (19), nous négligeons les termes d'ordre deux par rapport aux termes d'ordre un en  $\sqrt{\rho^2}$  et ces formules se simplifient et conduisent aux relations:

$$\frac{\overline{c'u'^2}}{u_s^2 f_s} \approx \frac{\overline{c''u''^2}}{u_s^2 f_s} \approx \frac{\rho_a \rho_h}{(\rho_a - \rho_h) u_s^2 f_s \bar{\rho}} (\overline{u'^2} - \overline{u''^2}), \tag{40}$$

$$\frac{\overline{c'v'^2}}{u_s^2 f_s} \approx \frac{\overline{c''v''^2}}{u_s^2 f_s} \approx \frac{\rho_a \rho_h}{(\rho_a - \rho_h) u_s^2 f_s \bar{\rho}} (\overline{v'^2} - \overline{v''^2}), \tag{41}$$

$$\frac{\overline{c'w'^2}}{u_s^2 f_s} \approx \frac{\overline{c''w''^2}}{u_s^2 f_s} \approx \frac{\rho_a \rho_h}{(\rho_a - \rho_h) u_s^2 f_s \bar{\rho}} (\overline{w'^2} - \overline{w''^2}), \tag{42}$$

$$\frac{\overline{c'u'v'}}{u_s^2 f_s} \approx \frac{\overline{c''u''v''}}{u_s^2 f_s} \approx \frac{\rho_a \rho_h}{(\rho_a - \rho_h) u_s^2 f_s \bar{\rho}} (\overline{u'v'} - \overline{u''v''}), \tag{43}$$

$$\frac{\overline{c'^2 u'}}{f_s^2 u_s} \approx \frac{\overline{c''^2 u''}}{f_s^2 u_s} \approx \frac{\rho_a \rho_h}{(\rho_a - \rho_h) f_s^2 u_s \bar{\rho}} (\overline{u'c'} - \overline{u''c''}), \tag{44}$$

$$\frac{\overline{c'^2 v'}}{f_s^2 u_s} \approx \frac{\overline{c''^2 v''}}{f_s^2 u_s} \approx \frac{\rho_a \rho_h}{(\rho_a - \rho_h) f_s^2 u_s \bar{\rho}} (\overline{v'c'} - \overline{v''c''}). \tag{45}$$

Ainsi, à des coefficients près, les valeurs prédites numériquement de

$$\frac{\overline{c''u''^2}}{u_s^2 f_s}, \quad \frac{\overline{c''v''^2}}{u_s^2 f_s}, \quad \frac{\overline{c''w''^2}}{u_s^2 f_s}, \quad \frac{\overline{c''u''v''}}{u_s^2 f_s}, \quad \frac{\overline{c''^2 u''}}{f_s^2 u_s}, \quad \frac{\overline{c''^2 v''}}{f_s^2 u_s},$$

représentent les écarts

$$\left(\overline{u^2} - \widetilde{u^2}\right), \quad \left(\overline{v^2} - \widetilde{v^2}\right), \quad \left(\overline{w^2} - \widetilde{w^2}\right),$$

$$\left(\overline{u'v'} - \widetilde{u'v'}\right), \quad \left(\overline{u'c'} - \widetilde{u'c'}\right), \quad \left(\overline{v'c'} - \widetilde{v'c'}\right);$$

aux mêmes coefficients près, les valeurs expérimentales de

$$\frac{\overline{c'u^2}}{u_s^2 f_s}, \quad \frac{\overline{c'v^2}}{u_s^2 f_s}, \quad \frac{\overline{c'w^2}}{u_s^2 f_s}, \quad \frac{\overline{c'u'v'}}{u_s^2 f_s}, \quad \frac{\overline{c'^2 u'}}{f_s^2 u_s}, \quad \frac{\overline{c'^2 v'}}{f_s^2 u_s}$$

représentent respectivement les mêmes écarts. Les profils d'origines numérique et expérimentale correspondant à

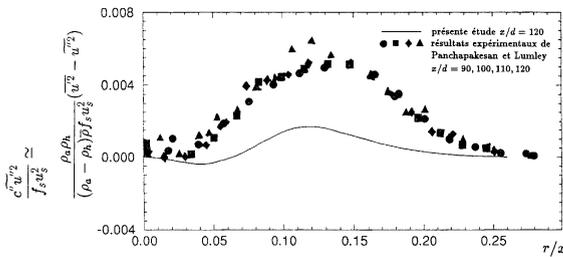


Fig. 10. Profils de corrélation triple  $\widetilde{c''u''^2}$  et de l'écart  $(\overline{u^2} - \widetilde{u^2})$ .

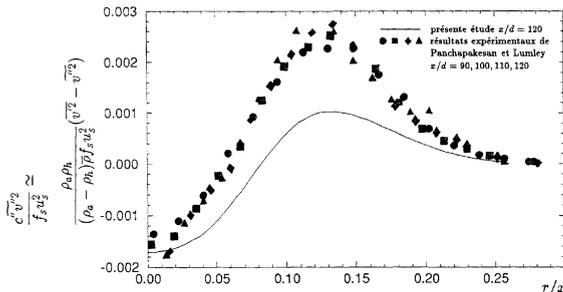


Fig. 11. Profils de corrélation triple  $\widetilde{c''v''^2}$  et de l'écart  $(\overline{v^2} - \widetilde{v^2})$ .

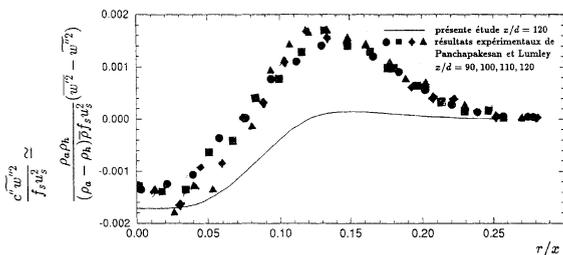


Fig. 12. Profils de corrélation triple  $\widetilde{c''w''^2}$  et de l'écart  $(\overline{w^2} - \widetilde{w^2})$ .

ces écarts sont présentés sur les Figs. 10, 11, 12, 13, 14 et 15.

En ce qui concerne les écarts

$$\left(\overline{u^2} - \widetilde{u^2}\right), \quad \left(\overline{v^2} - \widetilde{v^2}\right), \quad \left(\overline{w^2} - \widetilde{w^2}\right), \quad \left(\overline{u'v'} - \widetilde{u'v'}\right),$$

nous pouvons dire que si les prévisions sont qualitativement bonnes (mêmes types de variations), les écarts entre prévisions numériques et valeurs déduites de

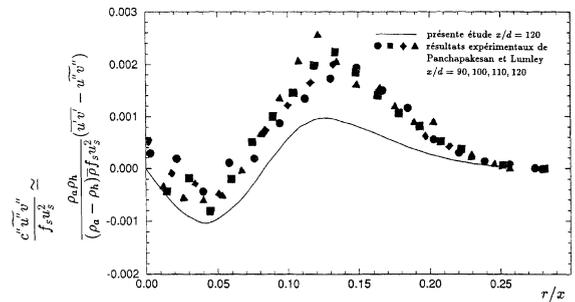


Fig. 13. Profils de corrélation triple  $\widetilde{c''u''v''}$  et de l'écart  $(\overline{u'v'} - \widetilde{u'v'})$ .

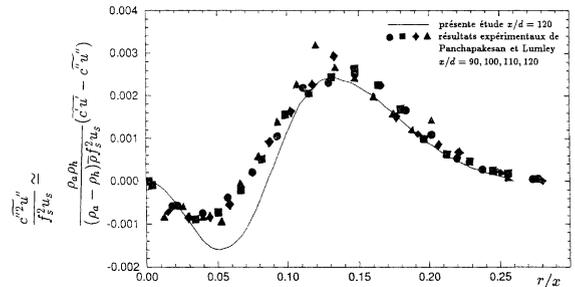


Fig. 14. Profils de corrélation triple  $\widetilde{c''u''}$  et de l'écart  $(\overline{c'u'} - \widetilde{c'u'})$ .

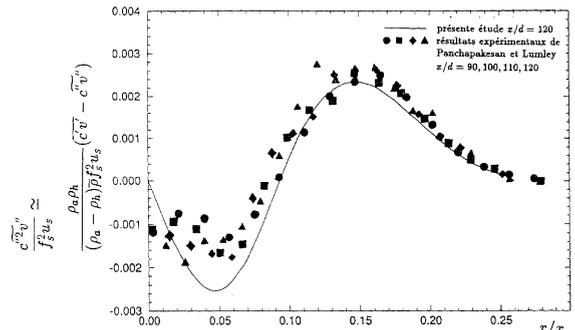


Fig. 15. Profils de corrélation triple  $\widetilde{c''v''}$  et de l'écart  $(\overline{c'v'} - \widetilde{c'v'})$ .

l'expérience sont importants et montrent que le modèle retenu pour les corrélations triples  $\overline{c''u''v''}$ ,  $\overline{c''u''w''}$ ,  $\overline{c''v''w''}$ ,  $\overline{c''u''v''}$ , doit être remplacé par un modèle plus performant. Dekeyser et Launder [30] et Panchapakesan et Lumley ont montré qu'un meilleur accord peut être obtenu pour les corrélations de type  $\overline{c''u''_i u''_j}$  en utilisant des modèles incluant les termes de production dûs aux gradients moyens, la partie linéaire des corrélations faisant intervenir la fluctuation de pression et les termes de dissipation.

Quant aux écarts  $\overline{u''c''} - \widetilde{u''c''}$  et  $\overline{v''c''} - \widetilde{v''c''}$ , on remarque un bon accord entre profils d'origines numérique et expérimentale; ce bon accord montre que les modèles (32) et (33) représentent correctement les corrélations triples de type  $\overline{c''u''_i u''_j}$  sous réserve que la valeur de la constante  $c_{cct}$  soit bien optimisée.

6.3. Ecarts entre corrélations d'ordre trois du type  $\overline{c''u''_i u''_j}$

Les écarts  $\overline{c''u''_i u''_j} - \widetilde{c''u''_i u''_j}$  peuvent être exprimés, en grandeurs de Favre, à l'aide de la relation (12) et, en grandeurs de Reynolds, à l'aide de la relation (21). Nous allons raisonner sur cette dernière relation parce qu'elle permet une analyse directe et claire de l'ordre des différents termes par rapport à  $\sqrt{\rho'^2}$  ou  $\sqrt{c'^2}$ ; en effet, réécrivons cette relation sous la forme:

$$\begin{aligned} \overline{c''u''_i u''_j} - \widetilde{c''u''_i u''_j} &= \frac{\overline{\rho' u'_i u'_j c'}}{\overline{\rho}} - \widetilde{u''_i u''_j} \frac{\overline{\rho' c'}}{\overline{\rho}} - \frac{\overline{\rho' u'_i u'_j}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' c'}}{\overline{\rho}} \\ &\quad - \widetilde{u''_j c''} \frac{\overline{\rho' u'_i}}{\overline{\rho}} - \frac{\overline{\rho' u'_j c'}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' u'_i}}{\overline{\rho}} - \widetilde{u''_i c''} \frac{\overline{\rho' u'_j}}{\overline{\rho}} \\ &\quad - \frac{\overline{\rho' u'_i c'}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' u'_j}}{\overline{\rho}} + 2 \frac{\overline{\rho' u'_i}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' u'_j}}{\overline{\rho}} \frac{\overline{\rho' c'}}{\overline{\rho}}. \end{aligned} \tag{46}$$

Utilisons alors l'approximation de Shih et al. [11]  $\rho' = (a/b)\overline{\rho^2}c'$  et négligeons les termes d'ordre quatre par rapport à  $\sqrt{c'^2}$ . Nous gardons ainsi les termes d'ordre deux et trois; de plus, nous utilisons l'approximation quasi-normale pour exprimer  $\overline{u'_i u'_j c'^2}$  soit  $\overline{u'_i u'_j c'^2} = \overline{u'_i u'_j} \overline{c'^2} + 2\overline{u'_i c' u'_j c'}$ . Dans ces conditions, les termes du second ordre se simplifient et l'écart  $\overline{c''u''_i u''_j} - \widetilde{c''u''_i u''_j}$  s'exprime à l'aide de termes du troisième ordre:

$$\overline{c''u''_i u''_j} - \widetilde{c''u''_i u''_j} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \overline{\rho^2} \left[ \overline{c'^2 u'_i u'_j} + \overline{u'_j c'^2 u'_i c'} + \overline{u'_i c'^2 u'_j c'} \right]. \tag{47}$$

Nous avons ainsi:

$$\overline{u''c''} - \widetilde{u''c''} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \overline{\rho^2} \left[ \overline{c'^2 u''c''} + 2\overline{u''c'^2 u''c''} \right], \tag{48}$$

$$\overline{v''c''} - \widetilde{v''c''} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \overline{\rho^2} \left[ \overline{c'^2 v''c''} + 2\overline{v''c'^2 v''c''} \right], \tag{49}$$

$$\overline{w''c''} - \widetilde{w''c''} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \overline{\rho^2} \overline{c'^2 w''c''}, \tag{50}$$

$$\overline{u''v''c''} - \widetilde{u''v''c''} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \overline{\rho^2} \left[ \overline{c'^2 u''v''c''} + \overline{u''c'^2 v''c''} + \overline{v''c'^2 u''c''} \right]. \tag{51}$$

Ces dernières relations permettent de prédire numériquement les écarts

$$\overline{u''c''} - \widetilde{u''c''}, \quad \overline{v''c''} - \widetilde{v''c''}, \quad \overline{w''c''} - \widetilde{w''c''},$$

$$\overline{u''v''c''} - \widetilde{u''v''c''}$$

en identifiant

$$\overline{c'^2}, \quad \overline{u''c''}, \quad \overline{v''c''}, \quad \overline{u''c'^2}, \quad \overline{v''c'^2}, \quad \overline{w''c'^2}, \quad \overline{u''v''c''}, \quad \overline{u''c'^2}$$

et  $\overline{u''v''c''}$

respectivement à

$$\overline{c''^2}, \quad \overline{u''c''}, \quad \overline{v''c''}, \quad \overline{u''^2 c''}, \quad \overline{v''^2 c''}, \quad \overline{w''^2 c''}, \quad \overline{u''v''c''}, \quad \overline{u''^2 c''^2},$$

et  $\overline{v''^2 c''^2}$ .

Les profils de ces écarts, obtenus numériquement, sont montrés Fig. 16; en fait, les écarts  $(\overline{w''c''} - \widetilde{w''c''})/u''_s^2 f_s$  sont trop petits par rapport aux autres écarts et n'ont pu être inclus dans cette représentation. La Fig. 16 montre notamment la similitude des variations de ces écarts.

6.4. Ecarts entre corrélations d'ordre trois du type  $\overline{u''_i c''^2}$

Partant de la formule de passage (22), les différences  $\overline{u''_i c''^2} - \widetilde{u''_i c''^2}$  comprennent des termes d'ordre trois, quatre et cinq par rapport à  $\sqrt{c'^2}$ . Négligeons les termes d'ordre cinq et utilisons l'hypothèse quasi-normale pour exprimer la corrélation quadruple  $\overline{u''_i c''^3}$ , les termes du troisième ordre disparaissent et nous gardons les termes d'ordre quatre, soit:

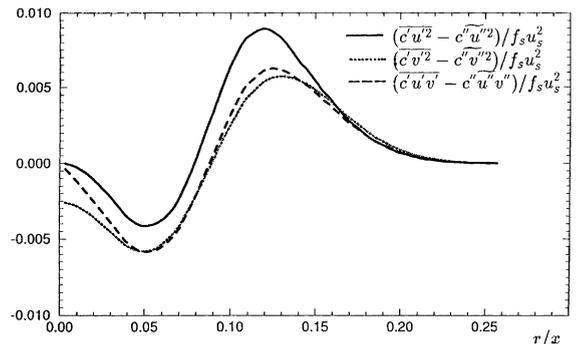


Fig. 16. Profils d'écarts  $(\overline{c'u''^2} - \widetilde{c''u''^2})/f_s u''_s^2$ ,  $(\overline{c'v''^2} - \widetilde{c''v''^2})/f_s u''_s^2$ ,  $(\overline{c'u''v''} - \widetilde{c''u''v''})/f_s u''_s^2$ .

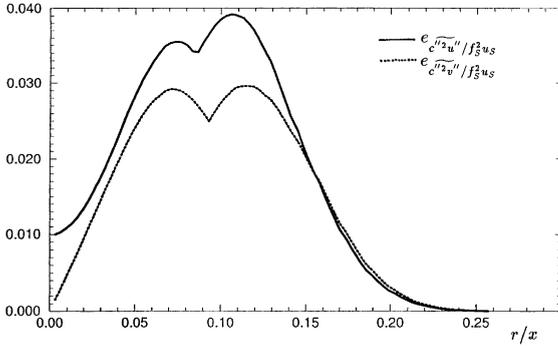


Fig. 17. Profils d'écarts  $e_{\widetilde{c^2 u''}}$  et  $e_{\widetilde{c^2 v''}}$ .

$$\widetilde{u'' c'^2} - \overline{u'' c'^2} = -2 \left( \frac{a}{b} \right)^2 \bar{\rho}^2 \left[ \overline{c'^2 u'' c'^2} - \overline{c'^3 u'' c'} \right]. \quad (52)$$

Nous ne pouvons raisonnablement envisager un modèle pour  $\overline{c'^3}$  puisque nous ne disposons pas de résultats expérimentaux susceptibles de le tester. Dans ces conditions, nous nous contentons d'appliquer l'inégalité de Schwartz:  $|\overline{c'^3}| \leq \sqrt{2 \overline{c'^2}^3}$  et nous obtenons alors:

$$\begin{aligned} \left| \overline{u'' c'^2} - \widetilde{u'' c'^2} \right| &\leq \left( \frac{a}{b} \right)^2 \bar{\rho}^2 \left[ 2 |\overline{u'' c'^2}| \overline{c'^2} + \sqrt{2 \overline{c'^2}^3} |\overline{u'' c'}| \right], \\ \left| \overline{v'' c'^2} - \widetilde{v'' c'^2} \right| &\leq \left( \frac{a}{b} \right)^2 \bar{\rho}^2 \left[ 2 |\overline{v'' c'^2}| \overline{c'^2} + \sqrt{2 \overline{c'^2}^3} |\overline{v'' c'}| \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Notons  $e_{\widetilde{u'' c'^2}}$  et  $e_{\widetilde{v'' c'^2}}$  les deuxièmes membres de ces inégalités. La Fig. 17 montre les profils de  $e_{\widetilde{u'' c'^2}}$  et  $e_{\widetilde{v'' c'^2}}$ . Ainsi,  $e_{\widetilde{u'' c'^2}}$  et  $e_{\widetilde{v'' c'^2}}$  représentent les maximums des valeurs absolues des écarts  $\overline{u'' c'^2} - \widetilde{u'' c'^2}$  et  $\overline{v'' c'^2} - \widetilde{v'' c'^2}$ . Nous pouvons noter, en particulier, que les profils de  $e_{\widetilde{u'' c'^2}}$  et  $e_{\widetilde{v'' c'^2}}$  ont la même allure.

## 7. Conclusion

La simulation numérique d'un jet d'hélium utilisant un modèle au second ordre en moyennes de Favre a montré que ce modèle permet de prédire correctement les variations à travers le jet, des différentes grandeurs statistiques jusqu'aux moments d'ordre deux, par référence aux résultats expérimentaux de Panchapakesan et Lumley.

De plus, grâce à des formules de passage entre grandeurs statistiques au sens de Favre et grandeurs statistiques au sens de Reynolds, la simulation numérique nous a permis de prévoir les écarts en ce qui concerne les corrélations d'ordres un, deux et même trois. Nous avons pu comparer ces prévisions aux résultats qu'il est possible de déduire des données

expérimentales très complètes de Panchapakesan et Lumley relatives aux corrélations d'ordres un et deux impliquant les vitesses et la fraction massique. Nous avons noté un bon accord entre valeurs de simulation et valeurs expérimentales pour les écarts entre vitesses axiales, fractions massiques et flux de masse axiaux et radiaux. Par contre, des différences nettes apparaissent entre prévisions numériques et valeurs déduites de l'expérience pour les écarts relatifs aux tensions de Reynolds. Pour y remédier, il y a lieu de remplacer par un modèle plus performant le modèle de type Deardorff adopté pur la corrélation triple du type  $\widetilde{c'' u'' u''}$ .

Comme les fluctuations de masse volumique sont faibles dans les expériences de Panchapakesan et Lumley, il reste évidemment à valider la démarche proposée de prévision numérique d'écarts entre grandeurs statistiques au sens de Favre et grandeurs statistiques au sens de Reynolds dans le cas où les fluctuations de masse volumique sont significatives.

## Appendix A

Les équations du modèle standard au second ordre en moyennes de Favre [32] sont écrites en coordonnées cylindriques  $x, r$  et  $\theta$  ( $\vec{e}_x$  est vertical ascendant,  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  sont horizontaux) dans le cadre des hypothèses d'axi-symétrie et de couche limite.

Rappelons que les composantes de la vitesse macroscopique sont notées  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} = 0$  et celles des fluctuations de vitesse au sens de Favre sont notées  $u'', v'', w''$ .

Par commodité, nous introduirons l'opérateur  $L$  qui agissant sur  $\tilde{f}$ , conduit à:

$$\begin{aligned} L(\tilde{f}) &= \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \tilde{f} \tilde{u}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\rho} \tilde{f} \tilde{v}) \\ &= \bar{\rho} \left[ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \right]. \end{aligned} \quad (A.1)$$

Les équations du modèle se présentent comme suit.  
Equation de conservation de la masse:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \tilde{u}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\rho} \tilde{v}) = 0. \quad (A.2)$$

Equation de transport de la fraction massique du constituant A:

$$L(\tilde{c}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\rho} \tilde{v} c''). \quad (A.3)$$

Equation de transport de la quantité de mouvement:

$$L(\tilde{u}) = -(\bar{\rho} - \rho_e)g - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \widetilde{u'' u''}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\rho} \widetilde{u'' v''}). \quad (A.4)$$

Gradient de pression moyenne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= -\rho_e g - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \widetilde{v''^2}), \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} &= -\frac{\partial}{\partial r} (\bar{\rho} \widetilde{v''^2}). \end{aligned} \tag{A.5}$$

Equations de transport des tensions de Reynolds:

$$\begin{aligned} L(\widetilde{u''^2}) &= P_{u''^2} + G_{u''^2} + \Phi_{u''^2} + d_{u''^2} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \varepsilon, \\ L(\widetilde{v''^2}) &= P_{v''^2} + G_{v''^2} + \Phi_{v''^2} + d_{v''^2} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \varepsilon, \\ L(\widetilde{w''^2}) &= P_{w''^2} + G_{w''^2} + \Phi_{w''^2} + d_{w''^2} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \varepsilon, \\ L(\widetilde{u''v''}) &= P_{u''v''} + G_{u''v''} + \Phi_{u''v''} + d_{u''v''}, \\ P_{u''^2} &= -2\bar{\rho} u'' v'' \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - 2\bar{\rho} u''^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \\ P_{v''^2} &= -2\bar{\rho} v''^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}, \\ P_{w''^2} &= -2\bar{\rho} w''^2 \frac{\partial \bar{v}}{r}, \\ P_{u''v''} &= -\bar{\rho} v''^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - 2\bar{\rho} u'' v'' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \\ G_{u''^2} &= -2\bar{u}'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \\ G_{v''^2} &= -2\bar{v}'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial r}, \\ G_{w''^2} &= 0, \\ G_{u''v''} &= -\bar{v}'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \bar{u}'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial r}, \\ \Phi_{u''^2} &= -c_1 \bar{\rho} \frac{\varepsilon}{k} \left[ \widetilde{u''^2} - \frac{2}{3} k \right] - \gamma \left[ P_{u''^2} - \frac{1}{3} \text{tr}(P) \right] \\ &\quad - c_3 \left[ G_{u''^2} - \frac{1}{3} \text{tr}(G) \right], \\ \Phi_{v''^2} &= -c_1 \bar{\rho} \frac{\varepsilon}{k} \left[ \widetilde{v''^2} - \frac{2}{3} k \right] - \gamma \left[ P_{v''^2} - \frac{1}{3} \text{tr}(P) \right] \\ &\quad - c_3 \left[ G_{v''^2} - \frac{1}{3} \text{tr}(G) \right], \\ \Phi_{w''^2} &= -c_1 \bar{\rho} \frac{\varepsilon}{k} \left[ \widetilde{w''^2} - \frac{2}{3} k \right] - \gamma \left[ P_{w''^2} - \frac{1}{3} \text{tr}(P) \right] \\ &\quad - c_3 \left[ G_{w''^2} - \frac{1}{3} \text{tr}(G) \right], \\ \Phi_{u''v''} &= -c_1 \bar{\rho} \frac{\varepsilon}{k} \widetilde{u''v''} - \gamma P_{u''v''} - c_3 G_{u''v''}, \\ d_{u''^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rc_s \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \widetilde{v''^2} \frac{\partial \widetilde{u''^2}}{\partial r} \right] + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rc_s \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} u'' v'' \frac{\partial \widetilde{u''v''}}{\partial r} \right], \\ d_{v''^2} &= \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rc_s \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \widetilde{v''^2} \frac{\partial \widetilde{v''^2}}{\partial r} \right] - 4c_s \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \frac{w''^2}{r^2} \left[ \widetilde{v''^2} - \widetilde{w''^2} \right] \\ &\quad - 2c_s \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \frac{v''^2}{r} \frac{\partial \widetilde{w''^2}}{\partial r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{w''^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rc_s \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \widetilde{v''^2} \frac{\partial \widetilde{w''^2}}{\partial r} \right] + 4c_s \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \frac{w''^2}{r^2} \left[ \widetilde{v''^2} - \widetilde{w''^2} \right] \\ &\quad + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rc_s \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \frac{w''^2}{r} \left( \widetilde{v''^2} - \widetilde{w''^2} \right) \right] \\ &\quad + 2c_s \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \frac{v''^2}{r} \frac{\partial \widetilde{w''^2}}{\partial r}, \\ d_{u''v''} &= \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rc_s \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \widetilde{v''^2} \frac{\partial \widetilde{u''v''}}{\partial r} \right] - 2c_s \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \frac{w''^2}{r^2} u'' v'' \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rc_s \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} u'' v'' \frac{\partial \widetilde{v''^2}}{\partial r} \right] - c_s \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \frac{u'' v''}{r} \frac{\partial \widetilde{w''^2}}{\partial r}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Equations de transport des flux de masse turbulents:

$$\begin{aligned} L(\widetilde{u''c''}) &= P_{u''c''} + G_{u''c''} + \Phi_{u''c''} + d_{u''c''}, \\ L(\widetilde{v''c''}) &= P_{v''c''} + G_{v''c''} + \Phi_{v''c''} + d_{v''c''}, \\ P_{u''c''} &= -\bar{\rho} v'' c'' \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{\rho} u'' c'' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{\rho} u'' v'' \frac{\partial \bar{c}}{\partial r} - \bar{\rho} u''^2 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}, \\ P_{v''c''} &= -\bar{\rho} v''^2 \frac{\partial \bar{c}}{\partial r} - \bar{\rho} u'' v'' \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - \bar{\rho} v'' c'' \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}, \\ G_{u''c''} &= -c'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = c'' \left[ \rho_e g + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \widetilde{v''^2}) \right], \\ G_{v''c''} &= -c'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = c'' \frac{\partial}{\partial r} (\bar{\rho} \widetilde{v''^2}), \\ \Phi_{u''c''} &= -c_{c1} \bar{\rho} \frac{\varepsilon}{k} u'' c'' - c_{c2} P_{u''c''}^c - c_{c3} G_{u''c''}, \\ \Phi_{v''c''} &= -c_{c1} \bar{\rho} \frac{\varepsilon}{k} v'' c'' - c_{c2} P_{v''c''}^c - c_{c3} G_{v''c''}, \\ P_{u''c''}^c &= -\bar{\rho} v'' c'' \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{\rho} u'' c'' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \\ P_{v''c''}^c &= -\bar{\rho} v'' c'' \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}, \\ d_{u''c''} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rc_{ci} \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \widetilde{v''^2} \frac{\partial \widetilde{u''c''}}{\partial r} \right] \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rc_{ci} \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} u'' v'' \frac{\partial \widetilde{v''c''}}{\partial r} \right] \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rc_{ci} \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} v'' c'' \frac{\partial \widetilde{u''v''}}{\partial r} \right], \\ d_{v''c''} &= \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rc_{ci} \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \widetilde{v''^2} \frac{\partial \widetilde{v''c''}}{\partial r} \right] - 2c_{ci} \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \frac{w''^2}{r^2} v'' c'' \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rc_{ci} \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} v'' c'' \frac{\partial \widetilde{v''^2}}{\partial r} \right] - c_{ci} \bar{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \frac{v'' c''}{r} \frac{\partial \widetilde{w''^2}}{\partial r}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Equation de transport de la variance du scalaire:

$$L(\widetilde{c''^2}) = P_{c''^2} + d_{c''^2} - 2\overline{\rho}\varepsilon_c,$$

$$P_{c''^2} = -2\overline{\rho}\widetilde{u''c''} \frac{\partial \widetilde{c}}{\partial x} - 2\overline{\rho}\widetilde{v''c''} \frac{\partial \widetilde{c}}{\partial r},$$

$$d_{c''^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rc_{cc1} \overline{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \widetilde{v''^2} \frac{\partial \widetilde{c''^2}}{\partial r} \right] + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rc_{cc1} \overline{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \widetilde{v''c''} \frac{\partial \widetilde{c''^2}}{\partial r} \right]. \quad (\text{A.8})$$

Equation de transport de la dissipation cinématique:

$$L(\varepsilon) = c_{\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \overline{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \widetilde{v''^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \frac{\text{tr}(P)}{2}$$

$$+ c_{\varepsilon 4} \frac{\varepsilon}{k} \frac{\text{tr}(G)}{2} - c_{\varepsilon 2} \overline{\rho} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (\text{A.9})$$

Equation de transport de la dissipation scalaire:

$$L(\varepsilon_c) = c_{\varepsilon c} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \overline{\rho} \frac{k}{\varepsilon} \widetilde{v''^2} \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial r} \right] + c_{\varepsilon c 1} \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon} \frac{P_{c''^2}}{2}$$

$$+ c_{\varepsilon c 1}^2 \frac{\varepsilon_c}{k} \frac{\text{tr}(P)}{2} - c_{\varepsilon c 2} \overline{\rho} \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon} - c_{\varepsilon c 2}^2 \overline{\rho} \frac{\varepsilon \varepsilon_c}{k}. \quad (\text{A.10})$$

## Références

- [1] A. Favre, Equations statistiques des gaz turbulents, C. R. Acad. Sci. Paris 246 (1958) 2573–3216.
- [2] A. Favre, Equations des gaz turbulents compressibles, I. Formes générales, J. Mec. 4 (1965) 361–390.
- [3] A. Favre, Equations des gaz turbulents compressibles, II. Méthode des vitesses moyennes: méthode des vitesses macroscopiques pondérées par la masse volumique, J. Mec. 4 (1965) 390–421.
- [4] A. Favre, Equations statistiques des fluides turbulents compressibles, in: Fifth Conf. Can. de Méc. Appl., New Brunswick Univ., 1975, pp. G3–G34.
- [5] J.H. Kent, R.W. Bilger, The prediction of turbulent diffusion flame fields and nitric oxide formation, in: 16th International Symposium on Combustion, The Combustion Institute, 1976, pp. 1643–1656.
- [6] R. Borghi, D. Dutoya, On the scales of the fluctuation in turbulent combustion, in: 17th International Symposium on Combustion, The Combustion Institute, 1978, pp. 235–244.
- [7] W.P. Jones, Models for turbulent flows with variable density and combustion, VKI Lecture Series, 1979-2, 1979.
- [8] D. Vandromme, Turbulence modelling in variable density flow, Ph.D. Thesis, Free University of Brussels, 1980.
- [9] J. Janicka, W. Kollmann, A prediction model for turbulent diffusion flows including NO-formation, AGARD Conf. Proc. 275 (1979) 1–16.
- [10] J. Janicka, J.L. Lumley, Second order modelling in non-constant density flows, Report FDA-81-01, Cornell University, 1981.
- [11] T.H. Shih, J.L. Lumley, J.L. Janicka, Second order modelling of a variable density mixing layer, J. Fluid Mech. 180 (1987) 93–116.
- [12] P.T. Bauer, G.W. Zumwalt, L.J. Fila, A numerical method and an extension of the Korst mixing theory for multi-species turbulent jet mixing, AIAA Paper 68(112), 6th Aerospace Sciences Meeting, New York, 1968.
- [13] H. Ha Minh, B.E. Launder, J.M. Mac Innes, A new approach to the analysis of turbulent mixing in variable density flows, in: Third Symposium on Turbulent Shear Flows, University of California, Davis, 1981, pp. 1919–1925.
- [14] P. Chassaing, Une alternative à la formulation des équations du mouvement turbulent d'un fluide à masse volumique variable, J. Mec. Theor. Appl. 4 (1985) 375–389.
- [15] P. Chassaing, J.M. Hérard, Second order modelling of a variable density turbulent mixing, in: Ninth Symposium on Turbulent Shear Flows, Toulouse, August 17, 1987.
- [16] P. Chassaing, M. Chibat, Second order modelling of a variable density turbulent mixing layer, in: Euromech Colloquium 237, Marseille, France, 1988.
- [17] P. Chassaing, G. Harran, L. Joly, Density fluctuation correlations in free turbulent binary mixing, J. Fluid Mech. 279 (1994) 239–278.
- [18] D. Vandromme, H. Ha Minh, Coupling of turbulence models with Reynolds averaged compressible Navier–Stokes equations. Applications to shock interactions, in: IMA/SMA/Conference Reading, 1987.
- [19] D. Vandromme, Turbulence modelling for compressible flows and implementation in Navier–Stokes solvers, VKI Lecture Series, 1991-02, 1991.
- [20] J. Cousteix, B. Aupoix, Three dimensional supersonic and hypersonic flows including separation, AGARD–FDP–VKI Special Course, 1989, pp. 1–53.
- [21] P. Chassaing, Mélange turbulent de gaz inertes dans un jet de tube libre, Thèse de Doc. es-sciences 42, Inst. Nat. Poly. de Toulouse, 1979.
- [22] J.M. Mac Innes, Turbulence modelling of flows with non uniform density, Ph.D. Thesis, University of Manchester, 1985.
- [23] R.M.C. So, J.Y. Zhu, M.V. Otugen, B.C. Hwang, Some measurements in a binary gas jet, Exp. Fluids 9 (1990) 237–284.
- [24] J.C. Sautet, Effets des différences de densité sur le développement scalaire et dynamique des jets turbulents, Thèse, Université de Rouen, 1992.
- [25] N.R. Panchapakesan, J.L. Lumley, Turbulence measurements in axisymmetric jet of air and helium. Part 2. Helium jet, J. Fluid Mech. 246 (1993) 225–247.
- [26] T. Djeridane, Contribution à l'étude expérimentale de jets turbulents axisymétriques à densité variable, Thèse, Université Aix-Marseille II, 1994.
- [27] E. Ruffin, Etude de jets turbulents à densité variable à l'aide de modèles de transport au second ordre, Thèse, Université Aix-Marseille II, 1994.
- [28] A. Gharbi, M. Amielh, F. Anselmet, Experimental investigation of turbulence properties in the interface region of variable density jets, Phys. Fluids 7 (10) (1995) 2444–2454.
- [29] J.W. Deardorff, Three dimensional modelling of the planetary boundary layer, Proceedings of the Workshop on Micrometeorology, 271, Am. Soc., 1973.
- [30] I. Dekeyser, B.E. Launder, A comparison of triple-moment temperature–velocity correlation in the asymmetric heated jet with alternative closure models, in: Fourth

- Symposium on Turbulent Shear Flows, Karlsruhe, 1983, pp. 14.1–14.8.
- [31] A.A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1976.
- [32] A. Gharbi, E. Ruffin, F. Anselmet, R. Schiestel, Numerical modelling of variable density turbulent jet, *Int. J. Heat Mass Transfer* 39 (9) (1996) 1865–1882.